

ÁLGEBRA

OPCIÓN A

Hallar una matriz: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 tal que $A^{-1}XA = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1}XA = AB \Rightarrow IXA = AB \Rightarrow XA = AB \Rightarrow XAA^{-1} = ABA^{-1} \Rightarrow XI = ABA^{-1} \Rightarrow X = ABA^{-1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

a) Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = \\ = (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)[c+a-(b+a)] = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \Rightarrow \text{Pr obado}$$

b) Hallar la solución del sistema: $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+4y+9z=2 \end{cases}$ que, además, satisface que la suma de valores correspondientes a cada una de las incógnitas es 4

$$\begin{cases} -2x-4y-6z=0 \\ x+4y+9z=2 \end{cases} \Rightarrow -x+3z=2 \Rightarrow x=-2+3z \Rightarrow (-2+3z)+2y+3z=0 \Rightarrow -2+3z+2y+3z=0 \\ 2y=2-6z \Rightarrow y=1-3z \Rightarrow \text{Solución general}(-2+3\lambda, 1-3\lambda, \lambda)$$

$$-2+3\lambda+1-3\lambda+\lambda=4 \Rightarrow \lambda=5 \Rightarrow (-2+3.5, 1-3.5, 5)$$

Solución pedida (13, -14, 5)

GEOMETRÍA

OPCIÓN A

Se considera la recta r y los planos π_1 y π_2 siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Determinar la posición relativa de los planos.
b) Calcular la distancia de r a π_2 .

a) Los planos pueden ser paralelos, en este caso los vectores directores son proporcionales y si tienen un punto común sería el mismo plano, o secantes

$$\frac{-3}{2} \neq \frac{2}{2} \Rightarrow \text{Son secantes}$$

b) En este caso la recta tiene que ser paralela al plano siendo los vectores directores, de ambos, perpendiculares y su producto vectorial es nulo, de no serlo la distancia será nula porque la recta cortará al plano o siéndolo si la distancia es nula es que la recta está contenida en el plano.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-3, 2, -1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (2, 2, -2) \equiv (1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_{\pi_2} = (-3, 2, -1) \cdot (1, 1, -1) = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)$$
$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_{\pi_2} = -3 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_{\pi_2}$$

Al ser perpendiculares, los vectores directores de recta y plano, estos son paralelos

La distancia será la de un punto, cualquiera, de la recta al plano. Se toma el punto R indicado en la ecuación de la recta

$$d_{r\pi_2} = d_{R\pi_2} = \frac{|3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 4 + 2 - 8|}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{|1|}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

OPCIÓN B

a) Obtener los valores α y β para los cuales el vector de componentes $(\alpha, \beta, 0)$ tiene

$$\text{módulo } \sqrt{2} \text{ y es perpendicular a la recta } r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

b) Estudiar si los vectores $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, -1)$ son linealmente independientes.

c) Calcular el ángulo que forman dos rectas cuyos vectores direccionales son \vec{b} y \vec{c} respectivamente.

a) Al ser perpendiculares el producto escalar del vector pedido y el director de la recta r es nulo

$$\begin{cases} (\alpha, \beta, 0) \cdot (-1, -1, -1) = 0 \Rightarrow -\alpha - \beta - 0 = 0 \Rightarrow -\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \\ \sqrt{(-\alpha)^2 + (-\beta)^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (-\beta)^2 + \beta^2 = 2 \Rightarrow$$

$$2\beta^2 = 2 \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \Rightarrow \alpha = -1 \\ \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones } \begin{cases} \vec{v}_1 = (1, -1, 0) \\ \vec{v}_2 = (-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \text{Que es el mismo vector}$$

b) Si son linealmente dependientes serán coplanarios, el determinante que forman es nulo, en caso contrario son independientes

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Son linealmente independientes}$$

c)

$$\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{c}|}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{|(0, 1, 1) \cdot (0, 1, -1)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|0 + 1 - 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos 0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Son perpendiculares}$$

ANÁLISIS

OPCIÓN A

1.-Sea $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

a) Calcular el máximo y mínimo absoluto de $f(x)$

b) Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje **OY**

c) Calcular $\int_0^x f(x) dx$

a)

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (2x-1) \cdot 2 \cdot (4x^2+1) - 8x(2x-1)^2}{(4x^2+1)^2} = 4 \cdot (2x-1) \cdot \frac{4x^2+1-2x(2x-1)}{(4x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 4 \cdot (2x-1) \cdot \frac{4x^2+1-4x^2+2x}{(4x^2+1)^2} = 4 \cdot (2x-1) \cdot \frac{2x+1}{(4x^2+1)^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$4 \cdot (2x-1) \cdot \frac{2x+1}{(4x^2+1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x-1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ 2x+1 > 0 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \\ (4x^2+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -\infty & & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \infty \end{matrix}$$

4	(+)	(+)	(+)
$x > \frac{1}{2}$	(-)	(-)	(+)
$x > -\frac{1}{2}$	(-)	(+)	(+)
$(4x^2+1)^2 > 0$	(+)	(+)	(+)
Resultado operación	(+) f'(x) > 0	(-) f'(x) < 0	(+) f'(x) > 0

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / \left(x < -\frac{1}{2}\right) \cup \left(x > \frac{1}{2}\right)$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

Máximo relativo en $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left[2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right]^2}{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{(-2)^2}{2} = 2$ (la gráfica, de la

función, pasa de **crecimiento a decrecimiento**)

OPCIÓN A(Continuación)

Continuación del Problema 1 de Análisis Opción A

$$\text{Mínimo relativo en } x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{(0)^2}{2} = 0 \text{ (la gráfica, de la función,}$$

pasa de **decrecimiento a crecimiento**)

$$4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \forall \notin \mathfrak{R} \Rightarrow \text{No existen asíntotas}$$

verticales

No habiendo asíntotas verticales, hay que estudiar la función en los extremos de los intervalos de su dominio, en este caso infinito positivo y negativo. Si no hay asíntotas horizontales entonces la grafica terminara en el infinito positivo, si las hay estudiaremos si su valor como función es mayor o menor(en es caso seria este el valor pedido) que el de la función en los máximos y mínimos hallados, en caso contrario estos son los valores absolutos buscados

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{1}{x^2}} = \frac{4 - 0 + 0}{4 + 0} = 1$$

Cuando $f(x)$ tiende a infinito la función tiende a 1 (asíntota horizontal)

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{1}{x^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{4 + 0} = 1$$

Cuando $f(x)$ tiende a menos infinito la función tiende a 1 (asíntota horizontal)

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 < 1 < f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ **el mínimo y el máximo relativo hallado son mínimo y**

máximo absoluto de la función o sea en $x = \frac{1}{2}$ hay un **MÍNIMO ABSOLUTO** y en $x = -\frac{1}{2}$

hay un **MÁXIMO ABSOLUTO**

b)

Para ser simétrica respecto a OY se tiene que cumplir que **$f(x) = f(-x)$**

$$f(-x) = \frac{4(-x)^2 - 4(-x) + 1}{4(-x)^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 + 1} \neq \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} = \frac{(2x-1)^2}{4x^2 + 1} = f(x) \Rightarrow \text{No es simétrica}$$

c)

$$\int_0^x \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} dx = \int_0^x \frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 1} dx - 4 \int_0^x \frac{x}{4x^2 + 1} dx = \int_0^x dx - 4 \int_1^{4x^2+1} \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{8} = [x]_0^x - \frac{1}{2} \cdot \int_1^{4x^2+1} \frac{dt}{t} = (x-0) - \frac{1}{2} \cdot [\ln t]_1^{4x^2+1} =$$

$$4x^2 + 1 = t \Rightarrow 8x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{8} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=x \Rightarrow 4x^2 + 1 = t \end{cases}$$

$$= x - \frac{1}{2} \cdot [\ln(4x^2 + 1) - \ln 1] = x - \frac{1}{2} \cdot [\ln(4x^2 + 1) - 0] = x - \frac{\ln(4x^2 + 1)}{2}$$

OPCIÓN A(Continuación)

2.-a) Razonar si para $F(x) = \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4}$ se satisface $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x + 2}$

a)

$$\int_0^{x^2} t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot [t^3]_0^{x^2} = \frac{1}{3} \cdot [(x^2)^3 - 0^3] = \frac{1}{3} \cdot x^6 \Rightarrow F(x) = \frac{\frac{1}{3} \cdot x^6}{x^4} = \frac{1}{3} \cdot x^2 \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 \\ F'(x) = \frac{2}{3} \cdot x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot x^2 = \frac{0^2}{3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot x = \frac{2 \cdot 0}{3} = \frac{0}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x + 2} &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x + 2})(\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2})}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1 - (4x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2 + 3x - 2}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{3 - 0}{\sqrt{4 + 0} + \sqrt{4 - 0 + 0}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

1.- Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

a) Estudiar su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \{x^2 [f(x+1) - f(x)]\}$

a)

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)}{(-1)+1} = -\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Asíntota vertical (estudiada más tarde)}$$

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

Asíntotas verticales

$$\text{En } x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{2}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{2}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

$$\text{Asíntota horizontal } y = 2 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)}{(-x)+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1-x} = -\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2x}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{-2}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\text{Asíntota horizontal } y = 2 \Rightarrow x \rightarrow -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2(-x)}{(-x)+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{(-x)(1-x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}(1-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1(1-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1-x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

No existen asíntotas oblicuas

OPCIÓN B(Continuación)**Continuación del Problema 1 de Análisis**

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 [f(x+1) - f(x)] \right\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left[\frac{2(x+1)}{(x+1)+1} - \frac{2x}{x+1} \right] \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left[\frac{2(x+1)}{x+2} - \frac{2x}{x+1} \right] \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left[\frac{2(x+1)^2 - 2x(x+2)}{(x+1)(x+2)} \right] \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x^2 \cdot \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x}{x^2 + 3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x^2 \cdot \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = 2 \end{aligned}$$

2.- Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista, en el tema, señala que, dada la estructura de la empresa, solo puede optar por alarmas de dos tipos, **A** o **B**; además afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarma de tipo **A** y el cuadrado del número de alarmas de tipo **B**. Estudiar cuantas alarmas de cada tipo debe de instalar en la empresa para maximizar la seguridad.

$$\begin{cases} A + B = 9 \Rightarrow A = 9 - B \\ S = \frac{1}{10} \cdot A \cdot B^2 = \frac{1}{10} \cdot (9 - B) \cdot B^2 = \frac{1}{10} \cdot (9B^2 - B^3) \Rightarrow S' = \frac{dS}{dB} = \frac{1}{10} \cdot (18B - 3B^2) = \frac{3}{10} \cdot B \cdot (6 - B) \Rightarrow \end{cases}$$

$$S' = 0 \Rightarrow B \cdot (6 - B) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ 6 - B = 0 \Rightarrow B = 6 \end{cases}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{dB^2} = \frac{1}{10} \cdot (18 - 6B) = \frac{6}{10} \cdot (3 - B) = \frac{3}{5} \cdot (3 - B) \Rightarrow \begin{cases} S''(0) = \frac{3}{5} \cdot (3 - 0) = \frac{9}{5} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ S''(6) = \frac{3}{5} \cdot (3 - 6) = -\frac{9}{5} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

$$\mathbf{A = 9 - 6 = 3}$$

Para que la seguridad sea máxima habrá que instalar **3 alarmas de tipo A** y **6 de tipo B**